

# Повышение точности и скорости HFBR алгоритма с помощью сжатых рекуррентных сверток

Ямаев Андрей<sup>1,2</sup>, Николай Попов<sup>3</sup>, Алексей Чуличков<sup>2</sup>  
rewin1996@gmail.com achulichkov@gmail.com

<sup>1</sup> ООО “Смарт Энджинс Сервис”, Москва, Россия

<sup>2</sup> Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, Москва,  
Россия

<sup>3</sup> Московский Физико-Технический Институт, Долгопрудный, Россия

**Аннотация** Классический алгоритм томографической реконструкции является методом свертки и обратного проецирования. Первый этап метода – свертка с фильтрующей функцией, которая реализуется через одномерное быстрое преобразование Фурье, имеющее вычислительную сложность  $O(n^2 \log n)$ . Теоретически обоснованной фильтрующей функцией является рамп-фильтр. Операция свертки с рамп-фильтром может быть аппроксимирована последовательным применением двух рекуррентных фильтров, т.е. вычислительная сложность этапа свертки составляет  $O(n^2)$ . В данной работе предложен способ асимптотически уменьшить в два раза количество умножений рекуррентного фильтра без уменьшения точности и, с другой стороны, повысить точность без увеличения вычислительной сложности. Часть коэффициентов рекуррентной свертки, приближенной к рамп-фильтру, строго равна нулю в силу свойств импульсной характеристики рамп-фильтра, за счет чего и производится ускорение или повышение точности. Проведены сравнительные эксперименты между сверткой, рекуррентной сверткой и предложенной сжатой рекуррентной сверткой на синтетических данных. Проведенные эксперименты подтвердили возможность повысить точность рекуррентных сверток без увеличения времени фильтрации синограммы.

**Ключевые слова:** компьютерная томография, рекуррентные свертки, оптимизация

## 1 Введение

Рентгеновская компьютерная томография позволяет восстановить внутреннюю структуру объекта по набору измеренных проекций под различными углами. Проекция обычно содержит в себе информацию о количестве поглощенного объектом рентгеновского излучения. В случае, если требуется реакция системы на временное событие внутри объекта, то требуется не

только быстро получать наборы проекций, но также и быстро реконструировать внутреннюю структуру объекта. Одним из самых быстрых алгоритмов реконструкции является алгоритм свертки и обратного проецирования (FBR), реализованный в большинстве серийно выпускаемых томографах [1]. Вычислительная сложность алгоритма для одного среза трехмерного объема –  $O(n^3)$ , где  $n$  – линейный размер реконструированного изображения внутренней структуры объекта (среза). В реальных случаях размер детектора составляет тысячи пикселей. Это приводит к тому, что время реконструкции достигает тысяч секунд. В работе предлагается метод ускорения метода FBR и его более быстрого аналога HFBR [2] (Hough Filtered Back Projection) посредством ускорения общего этапа свертки этих алгоритмов. Алгоритм FBR состоит из двух этапов: свертка и обратное проецирование. Этап свертки обычно имеет следующий вид

$$S(w) = \int_0^l S(x)e^{-iwx} dx, \quad (1)$$

$$S^F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_0}^{w_0} S(w)r(w)e^{iwx} dw, \quad (2)$$

$$r(w) = |w|/w_0, \quad (3)$$

где  $S(x)$  – синограмма,  $w$  – координата в Фурье пространстве,  $w_0$  – максимальная частота Фурье преобразования,  $l$  – ширина детектора в пикселях,  $r(w)$  – рамп функция,  $S^F(x)$  – результат операции свертки. Этап свертки FBR и вид  $r(w)$  (рамп-фильтра) обоснован в следующей работе [12]. В большинстве серийно выпускаемых томографических продуктов этот этап реализован показанным способом по формуле (2). Одним из самых быстрых алгоритмов реконструкции является HFBR [2]. Он ускоряет обратное проецирование посредством Быстрого Преобразования Хафа и имеет вычислительную сложность  $O(n^2 \log n)$ . А так же приближает рамп-фильтр рекуррентным фильтром вида

$$S^{F+}(x) = \sum_{k=0}^M a_k S(x-k) + \sum_{k=0}^M b_k S^{F+}(x-k-1), \quad (4)$$

$$S^{F-}(x) = \sum_{k=0}^M a_k S(x+k) + \sum_{k=0}^M b_k S^{F-}(x+k+1), \quad (5)$$

$$S^F(x) = S^{F+}(x) + S^{F-}(x), \quad (6)$$

где  $a_k, b_k$  веса симметричной рекуррентной свертки,  $S^{F+}$  – казуальный рекуррентный фильтр,  $S^{F-}$  – антиказуальный рекуррентный фильтр. Рекуррентный фильтр основан на идее итеративного его применения последовательно вдоль оси  $x$ . В казуальном случае рекуррентный фильтр последовательно применяется с положительным шагом по  $x$ , так что, значение на шаге  $x+1$  зависит только от значений входного сигнала, лежащих на

меньших значениях координаты, и от предыдущих результатов применения рекуррентного фильтра также лежащих на меньшей координату  $x$ . Физическим аналогом такой системы В нашей работе показано, что точность приближения рамп-фильтра рекуррентной свертки можно повысить, не повышая число необходимых операций. Этого можно достичь, заметив, что часть коэффициентов рекуррентной свертки принимают нулевой вид, и исключив нулевые коэффициенты из проводимых операций. Это позволит использовать более высокий порядок фильтра с тем же числом операций, что, очевидно, повысит точность приближения к рамп-фильтру.

## 2 Аппроксимация рамп-фильтра рекуррентным фильтром

Обозначим результат операции рекуррентной свертки как  $Q_{S,\vec{a},\vec{b}}(x)$ . Будем искать коэффициенты  $a_k, b_k$  векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  как решение минимизации функционала

$$\min_{\vec{a},\vec{b}}(\|Q_{S,\vec{a},\vec{b}} - S^F\|^2 + (Q_{S,\vec{a},\vec{b}}(l/2) - S^F(l/2))^2), \quad (7)$$

где  $\|Q_{S,\vec{a},\vec{b}} - S^F\|^2 - l_2$  норма между функциями,  $(Q_{S,\vec{a},\vec{b}}(l/2) - S^F(l/2))^2$  - квадратичная разность значений функции  $Q_{S,\vec{a},\vec{b}}$  и функции  $F$  в точке  $l/2$ . Будем минимизировать функционал на синопамме единичной высоты имеющей необходимые нам свойства шириной 612 пикселей и выражаемой формулой

$$S(x) = \{0 : x < 64; 1 : 64 \leq x < 546; 0 : x \geq 546; 2 : x == 256\} \quad (8)$$

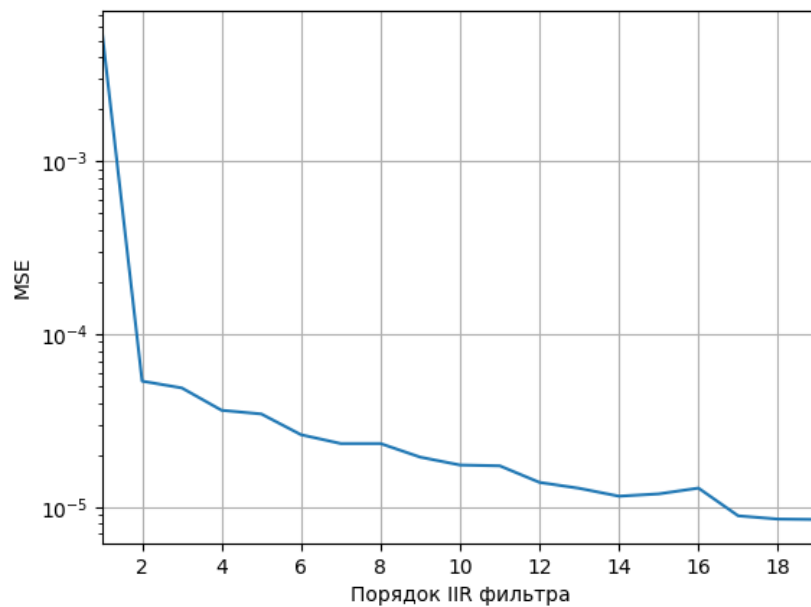
$S(x)$  составлена, как сумма дельта функции и константы, определенной в некоторой области. От 64 пикселя до 545 функция имеет единичное значение, кроме точки 256, где функция принимает значение 2. В остальных точках функция принимает нулевое значение. Дельта функция требуется для минимизации отличий импульсных характеристик рекуррентной свертки и рамп-фильтра. Константа требуется для минимизации роста результата рекуррентной свертки в области определения синопаммы при наличии константного ненулевого сигнала.

Задача минимизации функционала решалась с помощью пакета Pytorch [13] для рекуррентных фильтров порядка  $k = 1 \dots 19$ . Результирующий график точности аппроксимации частотного фильтра изображен на Рис. 1.

Как видно из графика, чем выше порядок рекуррентного фильтра, тем точнее можно повторить частотный фильтр. Визуально, различия в реконструкциях пропадают после 6-го порядка рекуррентного фильтра. Реконструкции от обученных фильтров порядка 1-10 показаны на Рис. 2 и 3.

## 3 Сжатый рекуррентный фильтр

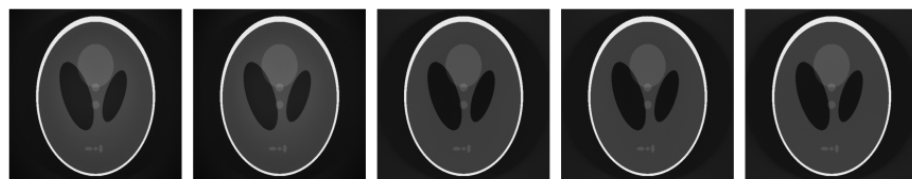
Импульсная характеристика частотного фильтра показана на рис. 5. В соответствии с графиком на рисунке наблюдается, что импульсная характери-



**Рис. 1.** Среднеквадратичная ошибка между импульсными характеристика рекуррентных фильтров к импульсной характеристике рамп-фильтра.



**Рис. 2.** Изображения реконструкций с помощью рекуррентных фильтров порядка 1–5 слева направо

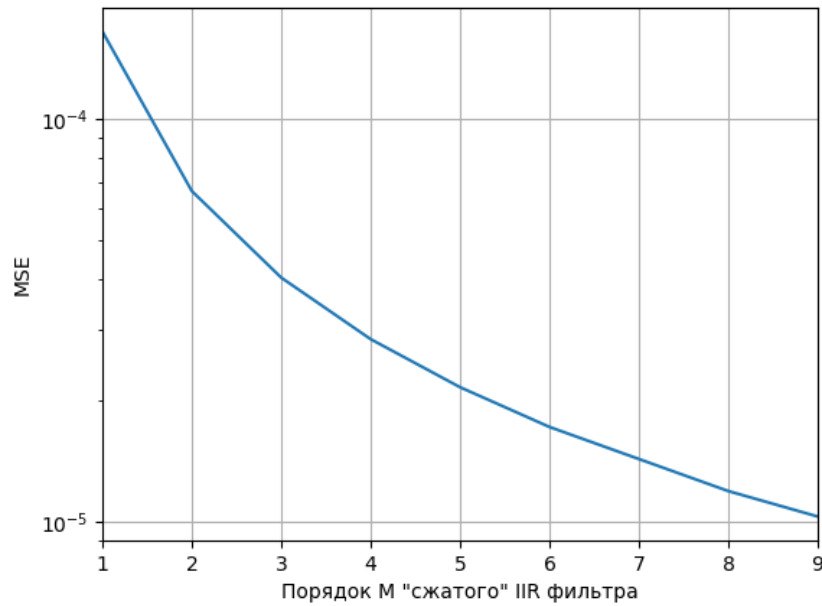


**Рис. 3.** Изображения реконструкций с помощью рекуррентных фильтров порядка 6–10 слева направо

стика рамп-фильтра имеет нулевые значения через один пиксель, исключая центральный. Это означает, что коэффициенты рекуррентного фильтра  $a_k$  соответствующие нулевым значениям импульсной характеристики, можно считать нулевыми. Аналогично, значения  $b_k$  соответствующие нулевым значениям импульсной характеристики также можно считать нулевыми. Формулы номера закрученных коэффициентом можно выразить следующим образом

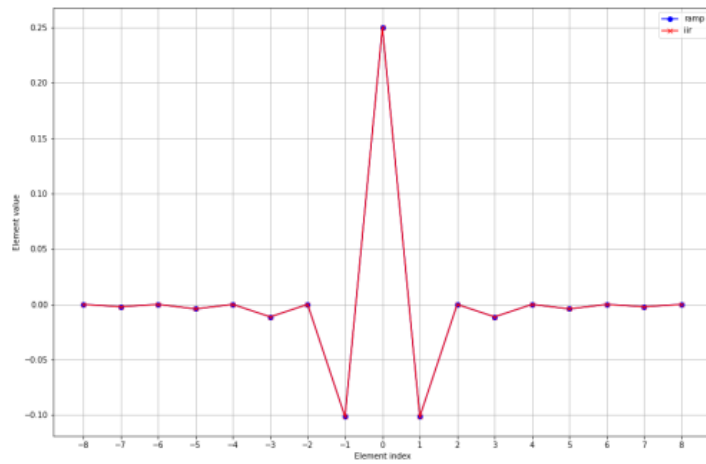
$$a_{2k} = 0, k \in \overline{0, M-1} \quad (9)$$

$$b_{2k+1} = 0, k \in \overline{0, M-1} \quad (10)$$



**Рис. 4.** Среднеквадратичная ошибка между импульсными характеристиками сжатых рекуррентных фильтров и импульсной характеристикой рамп-фильтра.

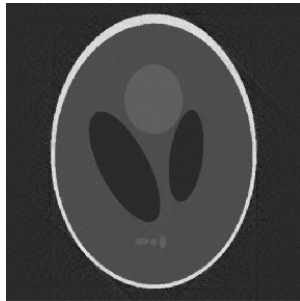
Аналогично для несжатых рекуррентных фильтров минимизируем функционал 7. График ошибки минимизации от порядка сжатого фильтра  $M$  изображен на Рис. 4. Как видно из рисунка, ошибка не увеличилась при использовании сжатой рекуррентной свертки, по сравнению с несжатой. Таким образом, если выбрать порядок фильтра  $M = 3$ , то почти не увеличивая количество операций, можно увеличить точность фильтрации по сравнению



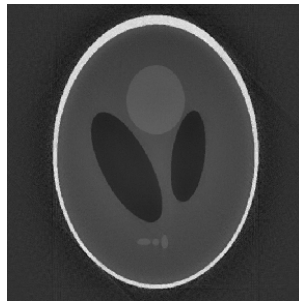
**Рис. 5.** Рамп-фильтр и его аппроксимация "сжатым" рекуррентным фильтром порядка  $M = 3$

с HFBR. Импульсные характеристики рамп-фильтра и сжатой рекуррентной свертки порядка  $M = 3$  показана на рис. 5.

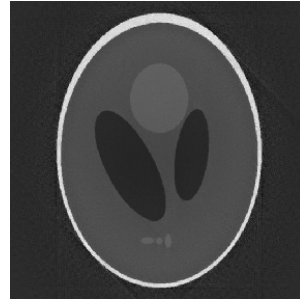
#### 4 Результаты



**Рис. 6.** HFBR реконструкция на основе рамп-фильтра



**Рис. 7.** HFBR реконструкция на основе рекуррентной свертки



**Рис. 8.** HFBR реконструкция на основе сжатая рекуррентной свертка

Коэффициенты рекуррентных свертки подбирались методом минимизации функционала LBFGS [14], реализация которого взята из пакета Pytorch. Количество шагов минимизации алгоритма в среднем составляло 2000.

На рис. 6, 7, 8 показаны реконструкции, полученные алгоритмом HFBP, у которого этап свертки был заменен на рамп-фильтр, рекуррентный фильтр, рекуррентный сжатый фильтр. Линейный размер реконструированного изображения равен 511 пикселям. Реконструкция выполнялась по 900 измеренным проекциям, лежащим в угловом диапазоне от 0 до 180 градусов.

Сравнения точности результатов реконструкции вычислены с помощью метрики STRESS [16], ключевая особенность которой заключается в том, что она не чувствительна к ошибкам нормировки изображений. Это свойство позволяет сравнивать именно структурное различие между реконструкциями. В таблице 1 приведены значения вычисленной метрики STRESS между результатами реконструкций и фантомом, а также время работы этапа фильтрации на одном потоке процессора Ryzen 7 2700x. Как видно, предложенный фильтр позволяет повысить точность алгоритма HFBP без увеличения затрат по времени, что визуально наблюдается на реконструкции фантома Шепш-Логана (рис. 6, 7, 8).

Алгоритм	STRESS	Время фильтрации (мсек)
HFBP (рамп)	0.2	26
HFBP	0.24	22
Ours	0.22	16

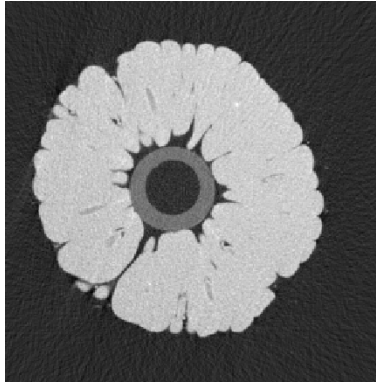
**Таблица 1.** Результаты реконструкции Шепш-Логана размером 511 на 511 пикселей

Алгоритм	Рамп фильтр	Рек. фильтр	Сжатый рек. фильтр
Шепш-Логан	0.2	0.24	0.22
3D Шепш-Логан	0.24	0.29	0.25
Малина	0.41	0.49	0.4

**Таблица 2.** Метрика STRESS к фантомам для HFBP реконструкций, использующих рамп-фильтр, рекуррентный фильтр, сжатый рекуррентный фильтр. Меньшее значение в таблице предпочтительнее.

## 5 Заключение

В работе показана возможность уменьшения количества умножений в рекуррентном фильтре, приближенном к рамп-фильтру. Количество умножений было уменьшено асимптотически в два раза без уменьшения точности этапа фильтрации в алгоритме томографической реконструкции. Предложена новая функция потерь для оптимизации, которая позволяет повысить



**Рис. 9.** Изображение полноракурсной реконструкции из набора данных Малина

точность аппроксимации рампы-фильтра рекуррентным фильтром в недоопределенной задаче минимизации функционала по коэффициентам рампы-фильтра. В проведенных экспериментах предложенный подход позволил повысить точность реконструкции алгоритма HFBP с 0.24 STRESS до 0.22 и уменьшить время фильтрации с 22 миллисекунд до 16 миллисекунд.

Установленные свойства рекуррентной свертки могут улучшить результаты таких нейросетевых алгоритмов, как [4–8]. В дальнейшем планируется исследование ускорения нейронных сетей с помощью рекуррентных сверток и его применимость в малоракурсном случае.

Эта работа частично поддержана грантами РФФИ 18-29-26020 и 19-01-00790.

## Список литературы

1. Turbell H. Cone-beam reconstruction using filtered backprojection : дис. – Linköping University Electronic Press, 2001.
2. Dolmatova A., Chukalina M., Nikolaev D. Accelerated FBP for computed tomography image reconstruction //2020 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). – IEEE, 2020. – С. 3030-3034.
3. Adler J., Öktem O. Learned primal-dual reconstruction //IEEE transactions on medical imaging. – 2018. – Т. 37. – №. 6. – С. 1322-1332.
4. Wu D. et al. Iterative low-dose CT reconstruction with priors trained by artificial neural network //IEEE transactions on medical imaging. – 2017. – Т. 36. – №. 12. – С. 2479-2486.
5. Kang E. et al. Wavelet domain residual network (WavResNet) for low-dose X-ray CT reconstruction //arXiv preprint arXiv:1703.01383. – 2017.
6. Chen H. et al. Low-dose CT with a residual encoder-decoder convolutional neural network //IEEE transactions on medical imaging. – 2017. – Т. 36. – №. 12. – С. 2524-2535.
7. Heinrich M. P., Stille M., Buzug T. M. Residual U-net convolutional neural network architecture for low-dose CT denoising //Current Directions in Biomedical Engineering. – 2018. – Т. 4. – №. 1. – С. 297-300.



8. Yamaev A. et al. Lightweight denoising filtering neural network for FBP algorithm //Thirteenth International Conference on Machine Vision. – International Society for Optics and Photonics, 2021. – Т. 11605. – С. 116050L.
9. Wu D. et al. A cascaded convolutional neural network for x-ray low-dose CT image denoising //arXiv preprint arXiv:1705.04267. – 2017.
10. Chen H. et al. Low-dose CT denoising with convolutional neural network //2017 IEEE 14th International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI 2017). – IEEE, 2017. – С. 143-146.
11. Regalia P. A. Adaptive IIR filtering in signal processing and control. – Routledge, 2018.
12. Wei Y., Wang G., Hsieh J. An intuitive discussion on the ideal ramp filter in computed tomography (I) //Computers Mathematics with Applications. – 2005. – Т. 49. – №. 5-6. – С. 731-740.
13. Paszke A. et al. Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library //Advances in neural information processing systems. – 2019. – Т. 32. – С. 8026-8037.
14. Liu D. C., Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization //Mathematical programming. – 1989. – Т. 45. – №. 1. – С. 503-528.
15. Asama M. et al. A machine learning imaging core using separable FIR-IIR filters //arXiv preprint arXiv:2001.00630. – 2020.
16. Коноваленко И. А. и др. ProLab: психофизически равномерная проективная система цветовых координат //Сенсорные системы. – 2020. – Т. 34. – №. 4. – С. 307-328.